Weyl配置のイデアル部分配置の自由性 (組合せ論的表現論とその周辺)

AUTHOR(S):

寺尾, 宏明

数理解析研究所講究録
第 1870 巻 2013 年 115-126

Weyl 配置のイデアル部分配置の自由性

寺尾宏明 (Hiroaki Terao)
北海道大学大学院理学研究院
Department of Mathematics, Hokkaido University
terao@math.sci.hokudai.ac.jp

概要

本稿は，[1] の主結果と証明の解説である．

Weyl 配置は有限 Weyl 群のルート系によって定義される．正ルートの集合がルート・ポセットのイデアルであるとき，対応する配置をイデアル部分配置と呼ぶ．本稿の主定理（定理 1.1）の主張は，(1) すべてのイデアル部分配置が自由配置であること，また，(2) その指数 (exponents) がイデアルの中のルートの高さ分布の双対分割で与えられることの 2 点である．特に，イデアル部分配置が Weyl 配置全体に等しい場合，主定理から，Shapiro, Steinberg, Kostant, Macdonald による著名な SSKM の公式 (系 1.2) が従う．主定理の証明は，自由配置の理論に大きく依存しており，SSKM の公式の知られている証明とは大きく異なる．

0 はじめに

2012 年 9 月の講演では「高さ自由予想 (height-free conjecture)」の解説をし，予想の根拠について述べたが，その後，阿部拓郎 (Takuro Abe), Mohamed Barakat, Michael Cuntz, Torsten Hoge との共著論文 [1] において，「高さ自由予想」（系 1.3）をはるかに超える形の定理（定理 1.1）を証明することができた．本稿では [1] に沿って，定理 1.1 の証明を追う．詳細については [1] を参照されたい．本稿の構成は以下の通りである．§1 で主結果を述べた後，§2 では自由配置の基本的な定義や結果を紹介する．§3 では，超平面配置の自由性を判定する新しい手法である multiple addition theorem (MAT) を準備する．§4 では，MAT を定理 1.1 の証明に適用するために，MAT の 3 つの条件を検証する．そして §5 において定理 1.1 とその系の証明を完成させる．

なお，本稿の執筆にあたって貴重なアドバイスをいただいた阿部拓郎氏に深く感謝する．

1 設定と主結果

Φ を階数 ℓ の既約ルート系とし，その単純系 (simple system) を $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ とする．Φ^+ を正ルートの集合とするとき，Φ^+ 上の（半）順序 $\geq$ を以下のように定義する：$\alpha, \beta \in \Phi^+$ が $\alpha \geq \beta$ であるとは，$\alpha - \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_1 + \cdots + \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_\ell$ となることである．Φ^+ の部分集合 I が**イデアル**であるとは，正ルート β がある $\alpha \in I$ に対して $\alpha \geq \beta$ ならば，$\beta \in I$ となることをいう．正ルート α の高さ $\mathrm{ht}(\alpha)$ とは，$\alpha = \sum_{i=1}^{\ell} c_i\alpha_i$ のとき $\sum_{i=1}^{\ell} c_i$ のことをいう．$m = \max\{\mathrm{ht}(\alpha) \mid \alpha \in I\}$ とせよ．I の**高さ分布 (height distribution)** とは，正整数の列 $(i_1, i_2, \ldots, i_m)$ のことを指す．ただし，$i_j := |\{\alpha \in I \mid \mathrm{ht}(\alpha) = j\}|$ とする．I の高さ分布の**双対配置 (dual partition)**$\mathcal{DP}(I)$ を，以下の ℓ 個の整数の多重集合として定義しよう：

$$\mathcal{DP}(I) := ((0)^{\ell - i_1}, (1)^{i_1 - i_2}, \ldots, (m-1)^{i_{m-1} - i_m}, (m)^{i_m}).$$

ここで $(a)^b$ は整数 a がちょうど b 回登場することを意味する．

$\alpha \in \Phi^+$ に対して，H_α を α に直交する超平面とする．また，イデアル $I \subseteq \Phi^+$ に対して，**イデアル部分配置** $\mathcal{A}(I) := \{H_\alpha \mid \alpha \in I\}$ を定義する．特に，$I = \Phi^+$ のとき，$\mathcal{A}(\Phi^+)$ は **Weyl 配置**であり，**自由配置**であることが知られている．（自由配置とその**指数 (exponents)** に関する基本的な定義や性質は §2 と [11] を参照されたい．）主定理は以下の通りである：

定理 1.1
全てのイデアル部分配置 $\mathcal{A}(I)$ は自由配置であり，その指数は $\mathcal{DP}(I)$ に等しい．

系 1.2 (Steinberg [12], Kostant [7], Macdonald [8])
Weyl 配置 $\mathcal{A}(\Phi^+)$ の指数 *(exponents)* は $\mathcal{DP}(\Phi^+)$ で与えられる．

系 1.2 は，[3] で，「Kostant, Macdonald, Shapiro と Steinberg による驚くべき (remarkable) 公式」として引用されており，A. Shapiro（未出版）によって初めて発見された．R. Steinberg は [12] においてこの事実を独立に発見している．これをルート系の分類に依らずに最初に証明したのは B. Kostant [7] であり，対応するリー群の principal な 3 次元部分群を研究することにより証明した．また，I. G. Macdonald は，[8] で，母関数を用いた証明を与えている．Macdonald の与えた証明の概略は [6, (3.20)] に紹介されている．G. Akyildiz-J. Carrell [2, 3] は，幾何学の立場からこの公式を拡張した．本稿の定

理 1.1 は自由超平面配置の理論の立場からの拡張であると言える．本稿における証明は，自由超平面配置の理論に深く依存し，今まで知られた証明とは大きく異なる．

系 1.2 の実例 (D_5 型ルート系の場合)

height distribution					
1	●				
1	●				
2	●	●			
3	●	●	●		
4	●	●	●	●	
4	●	●	●	●	
5	●	●	●	●	●
exponents	7	5	4	3	1

系 1.3

正ルートの集合 $\Phi^+ = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s\}$ $(\mathrm{ht}(\beta_1) \leq \mathrm{ht}(\beta_2) \leq \cdots \leq \mathrm{ht}(\beta_s))$ に対し，イデアル Φ_t を

$$\Phi_t := \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t\} \quad (1 \leq t \leq s)$$

と定義する．このときイデアル部分配置 $\mathcal{A}(\Phi_t)$ は自由配置であり，その指数は $\mathcal{DP}(\Phi_t)$ に等しい．

系 1.4

任意のイデアル $I \subseteq \Phi^+$ に対し，特性多項式 $\chi(\mathcal{A}(I), t)$ は

$$\chi(\mathcal{A}(I), t) = \prod_{i=1}^{\ell}(t - d_i)$$

と分解する．ここで $(d_1, \ldots, d_\ell)$ は $\mathcal{DP}(I)$ と一致する非負整数の多重集合である．

系 1.5

任意のイデアル $I \subseteq \Phi^+$ に対し，$\mathcal{A}(I)_{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{A}(I)$ の複素化とする．このとき

$$\mathrm{Poin}(M(\mathcal{A}(I)_{\mathbb{C}}), t) = \prod_{i=1}^{\ell}(1 + d_i t)$$

となる．ここで $M(\mathcal{A}(I)_{\mathbb{C}})$ は $\mathcal{A}(I)_{\mathbb{C}}$ の補集合であり，$(d_1, \ldots, d_\ell)$ は $\mathcal{DP}(I)$ と一致する非負整数の多重集合である．

2 自由配置

この章では自由配置に関するいくつかの基本的な概念や結果について紹介する．自由配置に関する標準的な参考文献としては [11] が挙げられる．

V を体 k 上の ℓ 次元ベクトル空間とする．このとき，**超平面配置**とは V 内の線形な超平面の有限集合のことである．$S := S(V^*)$ を双対空間 V^* の対称代数とする．超平面配置 $\mathcal{A}$ の定義多項式 $Q(\mathcal{A})$ を

$$Q(\mathcal{A}) := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H \in S$$

により定義する．ここで，$\alpha_H \in V^*$ は $H \in \mathcal{A}$ を定義する線形形式とする．導分加群 $\mathrm{Der}\, S$ を S 上の k-線形な導分全体の集合とする．$\mathrm{Der}\, S$ は階数 ℓ の自由 S-加群である．超平面配置 $\mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{A}$ の**対数的導分の加群** $D(\mathcal{A})$ を

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta \in \mathrm{Der}\, S \mid \text{すべての } H \in \mathcal{A} \text{ に対して } \theta(\alpha_H) \in \alpha_H S\}$$

と定義する．$D(\mathcal{A})$ が自由 S-加群となり，$\deg \theta_i = d_i$ $(i = 1, \ldots, \ell)$ であるような斉次基底 $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ を持つとき，$\mathcal{A}$ は**自由**で，その**指数 (exponents)** は $(d_1, \ldots, d_\ell)$ であるという．このとき，$\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ と書く．$\mathcal{A}$ の **intersection lattice** を

$$L(\mathcal{A}) := \{\bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\} \tag{2.1}$$

と定義する．但し，$L(\mathcal{A})$ の半順序は包含関係の逆として入れることにする．$V \in L(\mathcal{A})$ はその順序に関して最小であるとする．$X \in L(\mathcal{A})$ に対し，$\mathcal{A}$ の X での**局所化** $\mathcal{A}_X$ と**制限** $\mathcal{A}^X$ を以下のように定める：

$$\mathcal{A}_X := \{H \in \mathcal{A} \mid X \subseteq H\}, \tag{2.2}$$
$$\mathcal{A}^X := \{H \cap X \mid H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_X\}. \tag{2.3}$$

$L(\mathcal{A})$ 上の**メビウス関数** $\mu : L(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$ を

$$\mu(V) = 1, \quad \mu(X) = -\sum_{X \subsetneq Y \subseteq V} \mu(Y)$$

により定める．このとき，$\mathcal{A}$ の**特性多項式** $\chi(\mathcal{A},t)$ は

$$\chi(\mathcal{A},t) := \sum_{X\in L(\mathcal{A})} \mu(X)t^{\dim X}$$

と定義される．

定理 2.1 (分解定理, [14, 9, 11])
$\mathcal{A}$ を自由配置とし，$\exp(\mathcal{A}) = (d_1,\ldots,d_\ell)$ とする．このとき

$$\chi(\mathcal{A},t) = \prod_{i=1}^{\ell}(t-d_i).$$

$\mathcal{A}$ を複素空間 $V = \mathbb{C}^\ell$ 内の自由配置とし，$\exp(\mathcal{A}) = (d_1,\ldots,d_\ell)$ とする．$\mathcal{A}$ の補集合 $M(\mathcal{A})$ を

$$M(\mathcal{A}) := V \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H$$

と定義する．このとき，位相空間 $M(\mathcal{A})$ のポアンカレ多項式は

$$\mathrm{Poin}(M(\mathcal{A}),t) = \prod_{i=1}^{\ell}(1+d_it)$$

と分解する．

3 Multiple addition theorem

この章ではルート系 Φ は登場しない．以下の定理は addition theorem[13] の一つの変形である．

定理 3.1 (Multiple addition theorem (MAT))
$\mathcal{A}'$ を自由配置とし，$\exp(\mathcal{A}') = (d_1,\ldots,d_\ell)$ $(d_1 \le \cdots \le d_\ell)$ とする．また，$1 \le p \le \ell$ を最大指数の重複度とする．すなわち，

$$d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_{\ell-p} < d_{\ell-p+1} = \cdots = d_\ell =: d.$$

超平面 $H_1,\ldots,H_q$ に対し，$H_j \notin \mathcal{A}'$ $(j=1,\ldots,q)$ であるとする．H_j 内の超平面配置 $\mathcal{A}''_j$ を

$$\mathcal{A}''_j := (\mathcal{A}' \cup \{H_j\})^{H_j} = \{H\cap H_j \mid H \in \mathcal{A}'\}\ (j=1,\ldots,q)$$

と定義する．以下の３つの条件が全て満たされているとする：

(1) $X := H_1 \cap \cdots \cap H_q$ の余次元は q,

(2) $X \not\subseteq \bigcup_{H \in \mathcal{A}'} H$,

(3) $|\mathcal{A}'| - |\mathcal{A}''_j| = d$ $(1 \leq j \leq q)$.

このとき，$\mathcal{A} := \mathcal{A}' \cup \{H_1, \ldots, H_q\}$ は自由配置となる．また，$q \leq p$ となり，$\mathcal{A}$ の指数は $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_{\ell-q}, (d+1)^q)$ となる．

証明. 写像 $\nu_j : \mathcal{A}''_j \to \mathcal{A}'$ $(1 \leq j \leq q)$ が

$$\nu_j(Y) \cap H_j = Y \quad (Y \in \mathcal{A}''_j)$$

を満たしているとする．多項式 b_j を

$$b_j := Q(\mathcal{A}')/(\prod_{Y \in \mathcal{A}''_j} \alpha_{\nu_j(Y)})$$

と定める．ここで，$\alpha_{\nu_j(Y)}$ は $\nu_j(Y)$ を定義する線形形式とする．このとき，

$$D(\mathcal{A}')\alpha_{H_j} := \{\theta(\alpha_{H_j}) \mid \theta \in D(\mathcal{A}')\} \subseteq (\alpha_{H_j}, b_j)$$

となることが知られている．(例えば，[13] や [11, p. 114] を見よ．) $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ を $D(\mathcal{A}')$ の基底とし，$\deg \theta_i = d_i$ $(i = 1, \ldots, \ell)$，$\deg \theta_1 \leq \cdots \leq \deg \theta_{\ell-p} = d_{\ell-p} < d$ とする．条件 (3) から

$$\deg b_j = |\mathcal{A}'| - |\mathcal{A}''_j| = d$$

となるので，上の包含関係から

$$\theta_i \in D(\mathcal{A}) \quad (i = 1, \ldots, \ell - p)$$

が導かれる．ここで φ_i を

$$\varphi_i := \theta_{\ell-i+1} \quad (i = 1, \ldots, p)$$

と定める．$\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ の次数は全て d となることに注意する．b_j の次数も $\deg b_j = d$ であったので，定数 c_{ij} を用いて

$$\varphi_i(\alpha_{H_j}) \equiv c_{ij} b_j \bmod (\alpha_{H_j})$$

と書くことが出来る．C を $(p \times q)$-行列 $C = (c_{ij})_{i,j}$ とする．

条件 (2) から，$z \in X \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}'} H$ となる点 z を取ることが出来る．このとき，$D(\mathcal{A}')$ の z における evaluation は，V の接空間 $T_{V,z}$ 全体に等しい．従って，

$$T_{V,z} = \mathrm{ev}_z(D(\mathcal{A}')) = \mathrm{ev}_z\langle \varphi_1, \ldots, \varphi_p \rangle \oplus \mathrm{ev}_z\langle \theta_1, \ldots, \theta_{\ell-p} \rangle$$

となる．ここで，

$$\pi : T_{V,z} \longrightarrow T_{V,z}/T_{X,z}$$

を自然射影とする．行列 C の定義から，

$$\operatorname{rank} C = \dim \pi(\mathrm{ev}_z\langle \varphi_1, \dots, \varphi_p \rangle)$$

が成り立つことに注意する．さて，$\mathrm{ev}_z\langle \theta_1, \dots, \theta_{\ell-p} \rangle \subseteq T_{X,z}$ であるので，

$$\operatorname{rank} C = \dim \pi(\mathrm{ev}_z\langle \varphi_1, \dots, \varphi_p \rangle) = \dim (T_{V,z}/T_{X,z}) = q$$

となることがわかる．ここで最後の等式は条件 (1) により導かれる．よって，$q \leq p$ であるので，行基本変形を施すことにより

$$C = \begin{pmatrix} E_q \\ O \end{pmatrix}$$

と仮定してよい．従って，

$$\theta_1, \dots, \theta_{\ell-q}, \alpha_{H_1}\varphi_1, \dots, \alpha_{H_q}\varphi_q$$

は $D(\mathcal{A})$ の基底となる．以上により，$\mathcal{A}$ は自由配置で，$\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \dots, d_{\ell-q}, (d+1)^q)$ である． $\square$

4 MAT の3条件の検証

ここからは §1 と §2 で定義した記法を用いる．Weyl 配置 $\mathcal{A}(\Phi^+)$ を簡単に $\mathcal{A}$ と書くことがある．ルート系に関する標準的な参考文献としては [4] や [6] が挙げられる．

$\alpha \in \Phi^+$ とする．$\mathcal{A}^\alpha$ を Weyl 配置 $\mathcal{A}$ の H_α への制限とする．すなわち，

$$\mathcal{A}^\alpha := \mathcal{A}^{H_\alpha} = \{K \cap H_\alpha \mid K \in \mathcal{A} \setminus \{H_\alpha\}\}$$

と定める．α の **coheight** を

$$\operatorname{coht}_\Phi \alpha := h - 1 - \operatorname{ht}(\alpha)$$

により定義する．ここで h は Φ の Coxeter 数である．$X \in L(\mathcal{A})$ に対し，$\Phi_X := \Phi \cap X^\perp$ としよう．このとき，Φ_X は階数 $\operatorname{codim} X$ のルート系となる．Φ_X は既約とは限らないことに注意しておく．Φ_X が既約であるとき，

$$\operatorname{coht}_X \alpha := \operatorname{coht}_{\Phi_X} \alpha$$

と定義する．Φ_X が既約でなければ，α を含む Φ_X の既約因子 Ψ に対し，

$$\operatorname{coht}_X \alpha := \operatorname{coht}_\Psi \alpha$$

と定める．

イデアル部分配置に対し，MAT (定理 3.1) の条件 (3) が成立することを確かめるために，以下の定理と命題 4.2 が必要である：

定理 4.1 (coheight に対する local-global 公式)
$\alpha \in \Phi^+$ に対し，

$$\operatorname{coht}_\Phi \alpha = \sum_{X \in \mathcal{A}^\alpha} \operatorname{coht}_X \alpha$$

が成立する．

証明. $\operatorname{coht}_\Phi \alpha$ に関する帰納法による．α が最大ルートであるとき，両辺とも 0 に等しい．ここで $0 < \operatorname{coht}_\Phi \alpha < h-1$ と仮定する．単純ルート $\alpha_1 \in \Delta$ として $\beta := \alpha + \alpha_1 \in \Phi^+$ となるようなものを取る．このとき，$X_0 := H_\alpha \cap H_\beta$ とすると，$\{\alpha_1, \alpha, \beta\} \subseteq \Phi_{X_0}$ となる．ここで

$$C_\Phi(\alpha) := \sum_{X \in \mathcal{A}^\alpha} \operatorname{coht}_X \alpha$$

と定める．もし，

$$C_1 := C_\Phi(\alpha) - C_\Phi(\beta) - 1 = 0$$

が示されれば，帰納法の仮定から

$$C_\Phi(\alpha) = C_\Phi(\beta) + 1 = \operatorname{coht}_\Phi \beta + 1 = \operatorname{coht}_\Phi \alpha$$

を得る．よって，$C_1 = 0$ を示せばよい．さて，$\operatorname{coht}_{X_0} \alpha - \operatorname{coht}_{X_0} \beta = 1$，$X_0 \in \mathcal{A}^\alpha$ かつ $X_0 \in \mathcal{A}^\beta$ であることがわかる．従って，

$$\begin{aligned} C_1 = C_\Phi(\alpha) - C_\Phi(\beta) - 1 &= \sum_{X \in \mathcal{A}^\alpha} \operatorname{coht}_X \alpha - \sum_{Y \in \mathcal{A}^\beta} \operatorname{coht}_Y \beta - 1 \\ &= \sum_{X \in \mathcal{A}^\alpha \setminus \{X_0\}} \operatorname{coht}_X \alpha - \sum_{Y \in \mathcal{A}^\beta \setminus \{X_0\}} \operatorname{coht}_Y \beta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

ここで，$\mathcal{Z} := \mathcal{A}^{X_0} = \{K \cap X_0 \mid K \in \mathcal{A}, X_0 \not\subseteq K\}$ とすると，

$$C_1 = \sum_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{\substack{X \in \mathcal{A}^\alpha \setminus \{X_0\} \\ X \supset Z}} \operatorname{coht}_X \alpha - \sum_{\substack{Y \in \mathcal{A}^\beta \setminus \{X_0\} \\ Y \supset Z}} \operatorname{coht}_Y \beta \right)$$

となっていることが確認できる．ルート系が A_3, B_3, C_3 のいずれかであれば，coheight に対する local-global 公式を直接導くことは容易である．また，階数 2 のルート系に関しては，local-global 公式は自明に成立する．よって，階数 3 のルート系である $\Phi_Z(Z \in \mathcal{Z})$ に対しては，local-global 公式が成り立つとしてよいので，

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{Z \in \mathcal{Z}} \left(\sum_{\substack{X \in \mathcal{A}^\alpha \\ X \supset Z}} \operatorname{coht}_X \alpha - \sum_{\substack{Y \in \mathcal{A}^\beta \\ Y \supset Z}} \operatorname{coht}_Y \beta - \operatorname{coht}_{X_0} \alpha + \operatorname{coht}_{X_0} \beta \right) \\ &= \sum_{Z \in \mathcal{Z}} (\operatorname{coht}_{\Phi_Z} \alpha - \operatorname{coht}_{\Phi_Z} \beta - 1) = 0. \end{aligned}$$

□

命題 4.2
$I \subseteq \Phi^+$ をイデアルとする．$k+1 := \operatorname{ht}(\alpha) > 1$ を満たす正ルート $\alpha \in I$ を一つ固定する．このとき，

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}' := \{H_\beta \mid \beta \in I,\ \operatorname{ht}(\beta) \leq k\}, \\ &\mathcal{B} := \mathcal{B}' \cup \{H_\alpha\}, \quad \mathcal{B}'' := \mathcal{B}^{H_\alpha} = \{H \cap H_\alpha \mid H \in \mathcal{B}'\}, \end{aligned}$$

と定義すると，

$$|\mathcal{B}'| - |\mathcal{B}''| = k$$

が成り立つ．

証明. $I = \Phi^+$ のとき，三つ組 $(\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'')$ を $(\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{A}'')$ と書くことにする．このとき，$\mathcal{B}''$ は $\mathcal{A}'' = \mathcal{A}^\alpha$ の部分集合であることに注意する．$X \in \mathcal{A}''$ に対し，

$$|\mathcal{A}_X| - 2 - \operatorname{coht}_X \alpha = \begin{cases} |\mathcal{B}_X| - 2 & \text{if } X \in \mathcal{B}'', \\ 0 & \text{if } X \in \mathcal{A}'' \setminus \mathcal{B}'', \end{cases} \tag{4.2}$$

となることを示そう．ここで $\mathcal{A}_X$ と $\mathcal{B}_X$ は，(2.2) で定義した，X での局所化のことである．Φ_X^+ の高さ分布は以下の様になっている:

$$i_1 = 2, i_2 = \cdots = i_n = 1 \quad (n = |\Phi_X^+| - 1).$$

ケース 1. もし $X \in \mathcal{B}''$ であれば，$|\mathcal{B}_X| \geq 2$ となる．$I_X := I \cap \Phi_X^+$ は Φ_X^+ のイデアルであり，$|I_X| = |\mathcal{B}_X| \geq 2$ となるので，I_X は Φ_X の単純系を含む．よって，

$$I_X = \{\beta \in \Phi_X^+ \mid \operatorname{coht}_X \beta \geq \operatorname{coht}_X \alpha\} \quad \text{かつ} \quad |I_X| = |\Phi_X^+| - \operatorname{coht}_X \alpha$$

となる．従って，

$$|\mathcal{A}_X| - 2 - \operatorname{coht}_X \alpha = |\Phi_X^+| - \operatorname{coht}_X \alpha - 2 = |I_X| - 2 = |\mathcal{B}_X| - 2.$$

が成り立つので，このケースにおいては (4.2) が示される．

ケース 2. もし $X \in \mathcal{A}'' \setminus \mathcal{B}''$ であれば，$\mathcal{B}_X = \{H_\alpha\}$ かつ $I_X = \{\alpha\}$ となる．このとき，I_X は Φ_X^+ のイデアルなので，α は Φ_X の単純ルートである．よって，$\operatorname{coht}_X \alpha = |\mathcal{A}_X| - 2.$ となる．従って，(4.2) が成り立つ．

(4.2) と定理 4.1 を合わせることにより，

$$\begin{aligned}|\mathcal{B}'| - |\mathcal{B}''| &= \sum_{X \in \mathcal{B}''} (|\mathcal{B}_X| - 2) = \sum_{X \in \mathcal{B}''} (|\mathcal{A}_X| - 2 - \operatorname{coht}_X \alpha) \\ &= \sum_{X \in \mathcal{A}''} (|\mathcal{A}_X| - 2 - \operatorname{coht}_X \alpha) = \sum_{X \in \mathcal{A}''} (|\mathcal{A}_X| - 2) - \sum_{X \in \mathcal{A}^\alpha} \operatorname{coht}_X \alpha \\ &= |\mathcal{A}'| - |\mathcal{A}''| - \operatorname{coht}_\Phi \alpha = h - 2 - (h - 1 - (k+1)) = k\end{aligned}$$

を得る．ここで，最後から 2 番目の等式は，[10] の主結果を用いた． □

以下の命題 4.3 は，高さの等しい正ルートの集合が MAT の条件 (1) と (2) を満足することを示している．証明は，[1] を参照されたい．

命題 4.3

$\beta_1, \ldots, \beta_q$ を，全てが同じ高さ $k+1$ を持つような相異なる正ルートとし，

$$X := \bigcap_{i=1}^{q} H_{\beta_i}$$

とする．このとき，

(1) X の余次元は q であり，

(2)

$$X \not\subseteq \bigcup_{\substack{\alpha \in \Phi^+ \\ \operatorname{ht}(\alpha) \le k}} H_\alpha.$$

5 定理 1.1 の証明

この章では，定理 1.1 とその系の証明を完成させ，最後に一つの注意を与える．

定理 1.1 の証明. 証明は,

$$\mathrm{ht}(I) := \max\{\mathrm{ht}(\alpha) \mid \alpha \in I\}$$

に関する帰納法による.

$\mathrm{ht}(I) = 1$ のとき, $\mathcal{A}(I)$ は Boolean 配置である. 従って, 定理の主張は正しい.

$k+1 := \mathrm{ht}(I) > 1$ とする. I の部分集合 I_j を

$$I_j := \{\alpha \in I \mid \mathrm{ht}(\alpha) \leq j\}$$

と定義する. 定義から, 任意の $j \leq k+1$ に対し, I_j もまたイデアルとなる. 帰納法の仮定から, $I_1, \ldots, I_k$ に対して定理 1.1 が成り立つ. 特に, $\mathcal{A}(I_k)$ は自由配置で, その指数

$$\exp(\mathcal{A}(I_k)) = (d_1, \ldots, d_\ell)$$

は $\mathcal{DP}(I_k)$ に等しい. $p := |I_k \setminus I_{k-1}|$ とすれば, 帰納法の仮定により,

$$d_1 \leq \cdots \leq d_{\ell-p} < d_{\ell-p+1} = \cdots = d_\ell = k.$$

$\{\beta_1, \ldots, \beta_q\} := I_{k+1} \setminus I_k$ とする. $H_i := H_{\beta_i}$ とし, $X := H_1 \cap \cdots \cap H_q$ と定義する. このとき, 命題 4.3 により, $\operatorname{codim} X = q$ と

$$X \not\subseteq \bigcup_{H \in \mathcal{A}(I_k)} H$$

が示される. また, 命題 4.2 から, 任意の j に対して, $|\mathcal{A}(I_k)| - |(\mathcal{A}(I_k) \cup \{H_j\})^{H_j}| = k$ となることがわかる. 従って, MAT の条件 (1), (2), (3) が全て満たされていることが示された. 最後に, MAT を $\mathcal{A}(I) = \mathcal{A}(I_k) \cup \{H_1, \ldots, H_q\}$ に適用すればよい. $\square$

系 1.3 は集合 Φ_t がイデアルであることから従う. イデアル部分配置 $\mathcal{A}(I)$ に定理 2.1 を適用すれば, 系 1.4 と 1.5 が示される.

注意 5.1

二つの自由配置 $\mathcal{A}_1$ と $\mathcal{A}_2$ の積 $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ は, 再び自由配置となり, その指数 $\exp(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ は, $\exp(\mathcal{A}_1)$ と $\exp(\mathcal{A}_2)$ の *disjoint union* となる *[11, Proposition 4.28]*. 従って, 定理 *1.1* やその系が, 可約なルート系を含む全ての有限ルート系に対して成立することがわかる.

参考文献

[1] T. Abe, M. Barakat, M. Cuntz, T. Hoge and H. Terao, The freeness of ideal subarrangements of Weyl arrangements. preprint, arXiv:1304.8033.

[2] E. Akyildiz and J. Carrell, A generalization of the Kostant-Macdonald identity, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **86** (1989), 3934–3937.

[3] E. Akyildiz and J. Carrell, Betti numbers of smooth Schubert varieties and the remarkable formula of Kostant, Macdonald, Shapiro, and Steinberg. *Michigan Math. J.*, **61** (3) (2012), 543–553.

[4] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie.* Chapitres 4,5 et 6, Hermann, Paris, 1968.

[5] L. C. Grove and C. T. Benson, *Finite Reflection Groups* (2nd ed.), GTM **99**, Springer, New York, 2010.

[6] J. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics **29**. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[7] B. Kostant, The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group. *Amer. J. Math.*, **81** (1959), 973–1032.

[8] I. G. Macdonald, The Poincaré series of a Coxeter group. *Math. Ann.*, **199** (1972), 161–174.

[9] P. Orlik and L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. *Invent. Math.*, **56** (1980) 167–189.

[10] P. Orlik, L. Solomon and H. Terao, On the Coxeter arrangement and the Coxeter number. Advanced Studies in Pure Math. **8**, *Complex Analytic Singularities*, Kinokuniya and North- Holland, Tokyo-Amsterdam, 1986, 461–477.

[11] P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[12] R. Steinberg, Finite reflection groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **91** (1959), 493–504.

[13] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness I, II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **27** (1980), 293–320.

[14] H. Terao, Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepherd-Todd-Brieskorn formula. *Invent. Math.*, **63** (1981), 159–179.